

UN MODÈLE DE REMISE EN SUSPENSION DE TYPE “ROCK’N ROLL” QUASI-STATIQUE POUR UNE SPHÈRE GLISSANTE EN CONTACT AVEC UN PLAN GLISSANT

A. SELLIER¹, A. LOUCHAMI^{1,2}, F. GENSDARMES²

¹LadhyX, Ecole Polytechnique, 91129 Palaiseau Cdex, France

²Autorité de Sûreté Nucléaire et de Radioprotection (ASNR), PSN-RES/SCA/LPMA,
F-91400, Saclay, France
sellier@ladhyx.polytechnique.fr

A quasi-static “Rock’n Roll” resuspension model for a slip sphere at contact with a slip plane

RESUME

Un nouveau modèle quasi-statique de remise en suspension, dit “Rock’n Roll”, est proposé pour une sphère immobile glissante en contact avec une paroi plane et soumise à un écoulement de cisaillement. Sur chaque surface, le glissement est caractérisé par une longueur de glissement et la condition de glissement de Navier s’applique. Des interpolations et des formules pratiques ont été établies en régime d’écoulement de Stokes pour la force de traînée hydrodynamique et le couple (au centre de la sphère) exercés sur la sphère glissante.

ABSTRACT

A new quasi-static “Rock’n Roll” re-suspension model for a slip motionless sphere at contact with a plane slip wall and immersed in a shear flow is proposed. On each surface the slip is characterized by a slip length and the Navier slip condition applies. Handy interpolations and formulae are established, in the creeping flow regime, for the hydrodynamic drag force and torque (about the sphere center) exerted on a the sphere slip sphere.

MOTS-CLÉS:

Remise en suspension, “Rock’n Roll” modèle, glissement de Navier, équations de Stokes / **KEYWORDS:** resuspension, “Rock’n Roll” model, Navier slip, Stokes equations.

1. INTRODUCTION

Le détachement, sous l’action d’un écoulement, d’une particule solide micronique posée sur une paroi est un problème crucial pour certaines applications (Tokamak par exemple) et une importante littérature lui est ainsi dévolue (pour un état de l’art voir, par exemple, Henry et Minier (2014) et Henry *et al* (2023)).

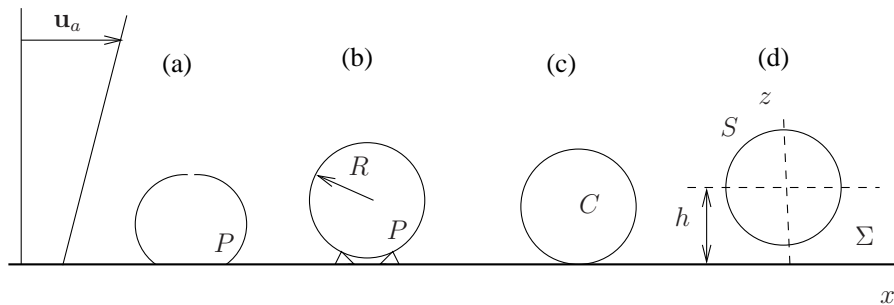


Figure 1: Une sphère solide, de centre C et rayon R , immobile sur ou au voisinage d’un plan solide et sujette à un écoulement ambiant de vitesse \mathbf{u}_a . (a) et (c): sphère au contact du plan. (b): sphère reposant sur deux aspérités. (d): sphère proche du plan avec $h > R$.

Comme montré à la Figure 1, les études considèrent une particule sphérique, de rayon R et centre C , adhérent à un plan Σ et plongée dans un écoulement ambiant, de vitesse \mathbf{u}_a et pression p_a , d’un fluide newtonien de viscosité de cisaillement μ et de masse volumique ρ . Le fluide peut glisser sur la surface S de la sphère et sur le plan Σ ce glissement étant modélisé par la condition de Navier (1823) avec la longueur de glissement λ_s sur S et λ_p sur Σ . On adopte des coordonnées cartésiennes (x, y, z) de vecteurs unitaires $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ et d’origine O avec \mathbf{OC} parallèle à \mathbf{e}_z . Le plan a pour équation $z = 0$ et la pesanteur est négligée. La sphère baigne dans la

sous-couche visqueuse où la vitesse ambiante, astreinte au glissement de Navier sur le plan (explicitée plus loin en (4)) s'écrit $\mathbf{u}_a = \dot{\gamma}(z + \lambda_p)\mathbf{e}_x$ avec une pression associée p_a constante. En pratique, le taux de cisaillement $\dot{\gamma} > 0$ (écoulement ambiant de la gauche vers la droite) peut être relié à la contrainte de cisaillement à la paroi due à la couche limite turbulente pour un gaz (Soltani et Ahmadi (1994)) ou laminaire pour un liquide. Enfin, pour $\lambda_p/R \leq O(1)$ le nombre de Reynolds $Re = \rho\dot{\gamma}R^2/\mu$ satisfait $Re \ll 1$ (voir Ziskind *et al* (1995)). Cette étude ne considère pas les fluctuations turbulentes et est dite quasi-statique. L'écoulement autour de la sphère est alors stationnaire de vitesse $\mathbf{u}_a + \mathbf{u}$ et de pression $p_a + p$. Par symétrie, il exerce sur cette dernière une force $\mathbf{F} = F_d\mathbf{e}_x + F_l\mathbf{e}_z$ et un couple $\mathbf{\Gamma} = \Gamma(C)\mathbf{e}_y$ par rapport au centre C de la sphère. Puisque $Re \ll 1$ l'écoulement est, comme (\mathbf{u}_a, p_a) , un écoulement de Stokes. Ainsi les symétries du problème montrent que $F_l = 0$ (pas de force de portance) et la force se réduit à la traînée $F_d\mathbf{e}_x$. Une force d'adhésion $-F_{ad}\mathbf{e}_z$ s'exerce sur une sphère au contact d'un plan lisse (Figure 1(a)) sur un disque de rayon a . De même, une force d'adhésion (notée aussi $-F_{ad}\mathbf{e}_z$) s'exerce sur chacune des deux aspérités sur laquelle une sphère repose (Figure 1(b)) pour un plan avec des aspérités petites en comparaison de la sphère et distante (notation pour harmoniser) de a également. Pour un contact élastique le rayon a du disque de contact peut être obtenu par les modèles JKR de Johnson *al* (1971) ou DMT de Derjaguin *al* (1975).

Dans certains cas la sphère se détache en roulant autour du point pivot P indiqué à la Figure 1 ce qui correspond au modèle "Rock'n Roll" (RNR) de mise en suspension proposé par Reek et Hall (2001) en instationnaire et utilisé ensuite en quasi-statique. Ici, le moment total des efforts (hydrodynamiques et d'adhésion) au point P est $\Gamma_t(P)\mathbf{e}_y$ et en quasi-statique le critère de mise en suspension de ce modèle est $\Gamma_t > 0$. En pratique $a/R \ll 1$ et avec nos notations cette condition prends la forme approchée $\Gamma(O) > aF_{ad}$ où $\Gamma(O) = RF_d + \Gamma(C)$ est le couple au point O des forces hydrodynamiques exercées par l'écoulement sur la sphère. Pour une sphère glissante de centre C situé à la distance $\tilde{h}R$ du plan (avec $\tilde{h} \geq 1$) introduisons les coefficients de friction f et c par les relations

$$F_d = 6\pi\mu\dot{\gamma}R^2(\tilde{h} + \tilde{\lambda}_p)f, \Gamma(C) = 4\pi\mu\dot{\gamma}R^3c, f = f(\tilde{\lambda}_s, \tilde{\lambda}_p, \tilde{h}), c = c(\tilde{\lambda}_s, \tilde{\lambda}_p, \tilde{h}), \tilde{\lambda}_s = \lambda_s/R, \tilde{\lambda}_p = \lambda_p/R. \quad (1)$$

Les formules généralisées de Faxen obtenues par Keh et Chang (1996) pour des interactions hydrodynamiques avec le plan ignorées montrent que $f_t := f(\tilde{\lambda}_s, \tilde{\lambda}_p, \infty) = (1 + 2\tilde{\lambda}_s)/(1 + 3\tilde{\lambda}_s)$ et $c_r := c(\tilde{\lambda}_s, \tilde{\lambda}_p, \infty) = 1/(1 + 3\tilde{\lambda}_s)$. Pour la sphère au contact du plan le couple hydrodynamique requis $\Gamma(O)$ par le modèle RNR précédent s'écrit

$$\Gamma(O) = 6\pi\mu\dot{\gamma}R^3[(1 + \tilde{\lambda}_p)f_c + 2c_c/3], f_c = f(\tilde{\lambda}_s, \tilde{\lambda}_p, 1), c_c = c(\tilde{\lambda}_s, \tilde{\lambda}_p, 1) \quad (2)$$

et le problème se réduit à calculer les valeurs f_c et c_c au contact qui ne dépendent que de $\tilde{\lambda}_s$ et $\tilde{\lambda}_p$. Noter que la force exercée sur une sphère glissante et immobile en milieu infini par l'écoulement ambiant uniforme de vitesse \mathbf{U} est $6\pi\mu R f_t \mathbf{U}$ (voir Basset (1888)). De plus, pour des surfaces non glissantes ($\tilde{\lambda}_s = \tilde{\lambda}_p = 0$) O'Neill (1968) a calculé les coefficients f_c et c_c . En cas de glissement et pour un gaz Maxwell (1879) obtient la longueur de glissement λ d'une surface de coefficient d'accommodation σ (dans $[0, 1]$) sous la forme $\lambda = (2 - \sigma)\ell/\sigma$ où ℓ est le libre parcours moyen. Dans ce cas $\tilde{\lambda}_s$ et $\tilde{\lambda}_p$ s'expriment en fonction du nombre de Knudsen $Kn = \ell/R$ et des coefficients d'accommodation de la surface de la sphère et du plan σ_s et σ_p .

Lorsque la pression ambiante diminue (scénario d'un accident de perte de vide pour ITER par exemple) ℓ et Kn augmentent et le glissement sur les deux surfaces (sphère et plan) n'est plus négligeable. Il doit être pris en compte sur les deux surfaces alors que dans le modèle RNR le plan est non glissant. Yu et Hu (2021) proposent de prendre en compte ces deux glissements par un modèle "Rock'n Roll" modifié (dit SRNR), se réduisant en fait au modèle RNR quand $\tilde{\lambda}_p = 0$ et reposant sur les deux *approximations* suivantes:

(i) Le calcul pour une sphère non glissante en prenant un plan non glissant distant de $R[1 + \tilde{\lambda}_p]$ du centre de la sphère en utilisant les résultats de Goldman *et al* (1967). Ainsi, Yu et Hu (2021) supposent que $f(0, \tilde{\lambda}_p, 1) \sim f(0, 0, 1 + \tilde{\lambda}_p)$ et $c(0, \tilde{\lambda}_p, 1) \sim c(0, 0, 1 + \tilde{\lambda}_p)$.

(ii) Le calcul de f_c et c_c par les approximations du modèle RNR à savoir $f_c \sim f(0, \tilde{\lambda}_p, 1)/Cu$ et $c_c \sim c(0, \tilde{\lambda}_p, 1)/Cu$ où Cu est le coefficient de Cunningham *et al* (1910) de forme expérimentale $Cu = 1 + Kn[A + Be^{-\alpha/Kn}]$ avec, comme dans Soltani et Ahmadi (1994), $A = 1.257$, $B = 0.4$ et $\alpha = 1.1$.

Ce travail d'une part examine la validité des étapes (i)-(ii) du modèle SRNR en utilisant une résolution numérique du problème de Stokes exact pour l'écoulement (\mathbf{u}, p) autour de la sphère et d'autre part propose un nouveau modèle plus précis et simple à implémenter.

2. ANALYSE CRITIQUE DU MODÈLE SRNR ET MODÈLE PROPOSÉ

La Figure 1(d) montre le problème de Stokes considéré pour une sphère de surface S et de centre C distant de $h = \tilde{h}R > R$ du plan Σ . Le fluide occupe le domaine \mathcal{D} et l'écoulement de Stokes (\mathbf{u}, p) a pour tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et satisfait

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ et } \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ dans } \mathcal{D}, (\mathbf{u}, p) \rightarrow (\mathbf{0}, 0) \text{ loin de } O. \quad (3)$$

L'écoulement (\mathbf{u}_a, p_a) a pour tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_a$ et \mathbf{n} est la normale dirigée vers le fluide sur Σ et S où s'exerce la superposition des forces surfaciques $\mathbf{f}_a = \boldsymbol{\sigma}_a \cdot \mathbf{n}$ et $\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. Les conditions de Navier sont alors

$$\mathbf{u} = \tilde{\lambda}_p(R/\mu)[\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] \text{ sur } \Sigma, \mathbf{u} = \tilde{\lambda}_s(R/\mu)[\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] - \mathbf{u}_a + \tilde{\lambda}_s(R/\mu)[\mathbf{f}_a - (\mathbf{f}_a \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] \text{ sur } S. \quad (4)$$

On notera que l'écoulement ambiant $\mathbf{u}_a = \dot{\gamma}(z + \lambda_p)\mathbf{e}_x$ vérifie bien sur le plan Σ la condition de Navier (4). Récemment une étude asymptotique menée par Ghalya et Sellier (2025) pour une particule non glissante en interaction avec un plan glissant a montré que l'approximation (i) du modèle SRNR proposé par Donghi et Hu (2020) est excellente si $\tilde{h} \gg 1$ à savoir pour une sphère située très loin du plan. Cependant, aucune preuve sur sa validité pour $\tilde{h} \leq O(1)$ n'est procurée par Yu et Hu (2021). Dans (2) les quantités $f_c = f(0, \tilde{\lambda}_p, 1)$ et $c_c = f(0, \tilde{\lambda}_p, 1)$ sont celles obtenues au contact pour une sphère non glissante. Ici elles sont calculées ainsi que $f_a := f(0, 0, 1 + \tilde{\lambda}_p)$ et $c_a := f(0, 0, 1 + \tilde{\lambda})$ avec une précision de 10^{-4} par la méthode des coordonnées bipolaires employée par Louissiaief *et al* (2015). Cette technique développe les composantes de \mathbf{u} et la pression p en séries infinies qui sont tronquées en ne retenant que N termes. Pour une précision requise il faut prendre N très grand si $\epsilon = \tilde{h} - 1 \ll 1$ et les valeurs de f_c et c_c sont alors ici obtenues avec une précision de 10^{-4} par extrapolation affine des valeurs calculées pour $\tilde{h} = 1.005$ et $\tilde{h} = 1.001$.

Tableau 1: Quelques comparaisons numériques pour l'approximation (i) proposée par Donghi et Hu (2020)

$\tilde{\lambda}_p$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	1	2	3	5	10
f_c	1.7006	1.6317	1.5257	1.4466	1.3846	1.3125	1.1663	1.0857	0.9965	0.9021
f_a	1.7006	1.6325	1.5285	1.4528	1.3954	1.3315	1.2135	1.1564	1.1013	1.0536
$(f_a/f_c) - 1$	0	0.0005	0.0018	0.0043	0.0078	0.0145	0.0422	0.0651	0.1052	0.1679
c_c	0.9440	0.9622	1.0114	1.0647	1.1191	1.2012	1.4735	1.7413	2.2665	3.5450
c_a	0.9440	0.9518	0.9639	0.9727	0.9790	0.9854	0.9947	0.9975	0.9992	0.9999
$1 - (c_a/c_c)$	0	0.0109	0.0469	0.0864	0.1252	0.1797	0.3249	0.4271	0.5591	0.7180

Des comparaisons de (f_c, c_c) et (f_a, c_a) et les erreurs relatives associées sont données dans le Tableau 1 pour quelques valeurs de $\tilde{\lambda}_p \leq 10$. Les erreurs relatives croissent avec $\tilde{\lambda}_p$. De plus, pour $\tilde{\lambda}_p \leq 1$ l'approximation $f_c \sim f_a$ pour la force est précise ayant une erreur relative d'au plus 1.5% ce qui n'est pas le cas pour l'approximation $c_c \sim c_a$ pour le couple car l'erreur relative atteint cette fois 18% pour $\tilde{\lambda}_p = 1$. Pour $\tilde{\lambda}_p > 1$ l'erreur relative sur le couple peut devenir très importante (elle atteint 32% pour $\tilde{\lambda}_p = 2$ et monte à 72% pour $\tilde{\lambda}_p = 10$!).

En conclusion, pour une précision relative du pourcent l'approximation (i) du modèle SRNR reste correcte pour la force si $\tilde{\lambda}_p \leq 1$ et pour le couple si $\tilde{\lambda}_p \leq 0.1$. En dehors de ces domaines elle se détériore rapidement et beaucoup pour le couple et ce d'autant plus que $\tilde{\lambda}_p$ est grand. Une formule d'interpolation précise à 10^{-3} des coefficients au contact f_c et c_c sera fournie lors de la présentation de ce travail.

L'examen de la validité de l'approximation (ii) du modèle SRNR nécessite des calculs précis cette fois pour une sphère glissante au contact d'un plan glissant. Quelques résultats précis sont tabulés pour $\tilde{h} = 1.5431$ et $\tilde{h} = 1.1276, 1.0453$ dans Luo et Pozrikidis (2008). Ces auteurs utilisent une résolution par équation intégrale sur la surface de la sphère et du plan. L'implémentation numérique tronque ce dernier et les résultats obtenus (comparaison avec le cas de la sphère non glissante) sont précis à 10^{-3} . Les valeurs au contact f_c et c_c sont ici obtenues par extrapolation affine des résultats fournis pour $\tilde{h} = 1.1276, 1.0453$. Ce faisant on obtient pour $\tilde{\lambda}_p = 1$ les valeurs $f_c = 1.313$ et $c_c = 1.200$ qui sont en très bon accord avec celles du Tableau 1. Désormais, $f_c(LP)$ et $c_c(LP)$ indiquent des valeurs au contact obtenues par extrapolation de résultats fournis dans Luo et Pozrikidis (2008).

Tableau 2: Comparaisons pour $\sigma_s = \sigma_p = 0.886$ des valeurs de f_c et c_c par LP et le modèle SRNR

$\tilde{\lambda}_s$	$\tilde{\lambda}_p$	$f_c(LP)$	$f_c(SRNR)$	f_c^*	$c_c(LP)$	$c_c(SRNR)$	c_c^*
0	0	1.70	1.70	1.70	0.94	0.94	0.94
0	0.1	1.63	1.63	1.63	0.96	0.95	0.96
0	1	1.31	1.33	1.31	1.20	0.99	1.20
0.1	0	1.52	1.55	1.52	0.73	0.86	0.73
0.1	0.1	1.46	1.49	1.46	0.74	0.86	0.74
0.1	1	1.19	1.21	1.18	0.92	0.90	0.92
1	0	1.14	0.82	1.16	0.23	0.45	0.24
1	0.1	1.11	0.79	1.11	0.24	0.46	0.24
1	1	0.93	0.64	0.90	0.29	0.47	0.30

Le Tableau 2 fournit les valeurs de f_c et c_c obtenues avec les résultats de Luo et Pozrikidis (2008) et le modèle SRNR. Pour $\tilde{\lambda}_s$ et $\tilde{\lambda}_p$ au plus de 0.1 les accords sont bons pour f_c mais moins bons pour c_c pour lequel le même coefficient correctif de Cunningham est appliqué que pour f_c manifestement à mauvais escient et sans fondement théorique. En dehors de ce domaine de glissement le modèle SRNR n'est pas en accord avec les calculs précis

de Luo et Pozrikidis (2008) les erreurs de l'approximation (i) de ce modèle devenant non négligeables pour le couple comme montré au Tableau 1.

La dernière colonne du Tableau 2 procure la valeur $c_c^* = c_c(\text{Bipolaires})/(1 + 3\tilde{\lambda}_s)$ où $c_c(\text{Bipolaires})$ est la valeur calculée pour la sphère non glissante au contact du plan avec la technique des coordonnées bipolaires (à savoir la valeur c_c du Tableau 1). L'accord pour c_c^* avec les prédictions déduites de Luo et Pozrikidis (2008) est excellent dans toute la gamme des glissements considérés. La formule de c_c^* est ainsi celle proposée par notre nouveau modèle. La troisième colonne du Tableau 2 fournit la valeur $f_c^* = f_c(\text{Bipolaires})f_t(16 + 9f_t)/25$ avec $f_t = (1 + 2\tilde{\lambda}_s)/(1 + 3\tilde{\lambda}_s)$ déjà défini après (1). Un accord excellent est observé entre f_c^* et Luo et Pozrikidis (2008).

Ainsi, en présence de glissement sur le plan et sur la sphère le modèle quasi-statique de type Rock'n Roll proposé dans cette étude consiste en une formule d'interpolation donnant les valeurs précises de f_c et c_c calculées en coordonnées bipolaires pour une sphère non glissante puis la prise en compte du glissement sur la sphère par les formules simples précédentes pour les coefficients f_c^* et c_c^* . Ces formules donnent un accord avec Luo et Pozrikidis (2008) de l'ordre du pourcent lorsque $\tilde{\lambda}_s \leq O(1)$ et $\tilde{\lambda}_p \leq O(1)$. Elles seront justifiées et les formules d'interpolation seront précisées lors de la présentation.

Henry, C. and Minier, J.-P. (2014) Progress in particle resuspension from rough surfaces by turbulent flow. *Progress in Energy and Combustion Science*, 45, 1-53.

Henry, C., Minier, J.-P. and Brambilla, S. (2023) Particle resuspension: challenges and perspectives for future models. *Physics Reports*, 1007, 1-98.

C. L. M. H. Navier, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, Mémoire de l'Académie Royale des sciences de l'Institut de France. VI, 1823.

Soltani, M., Ahmadi, G. (1994) On particle adhesion and removal mechanisms in turbulent flows. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 8, 763785.

Ziskind, G., Fichman, M. and Gutfinger, C. (1995). Resuspension of particles from surfaces to turbulent flows-Review and analysis. *J. Aerosol Sci.*, 26(4), 613644.

Johnson, K. L., Kendall, K. and Roberts, A. D. (1971). Surface energy and the contact of elastic solids. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 324,301-313.

Derjaguin, B. V., Muller, V. M. and Toporov, Yu. P. (1975) Effect of Contact Deformations on the Adhesion of Particles. *J. Colloid Interface Sci.*, 53, 314-326.

M. W. Reeks, D. Hall. (2001) Kinetic models for particle resuspension in turbulent flows: Theory and measurement. *Journal of Aerosol Science*, 32, 131.

Keh, H.J. and Chang, Y. C. (1996). The motion of a slip spherical particle in an arbitrary stokes flow. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 15, 791-807.

Basset, A. B. (1888) *A Treatise on Hydrodynamics*. Deighton, Bell and Co., Cambridge, England.

O'Neill, M.E. (1968) A sphere in contact with a plane wall in a slow linear shear flow. *Chemical Engineering Science*, 23: 1293-1298.

Maxwell, J. C. (1879). On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 170, 231256.

Dongchi Yu. Fei Hu. (2021) Application of the RocknRoll (RNR) resuspension model with nonzero slip velocities on particle and substrate surfaces. *Journal of Aerosol Science* 151, 105675.

Goldman, A. J., Cox, R. G. and Brenner, H. (1967) Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall. II Couette flow. *Chemical Engineering Science*, 22, 653-660.

Cunningham, E. and Larlor, J. (1910). On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 83,357-365.

Ghalya, N. and Sellier, A. (2025) Slow motion of a non-spherical solid body immersed in a fluid near a plane slip wall. *J. Fluid Mech.*,1022, A8, doi:10.1017/jfm.2025.10753.

Loussaief, H., Pasol, L. and Feuillebois, F. (2015) Motion of a spherical particle in a viscous fluid along a slip wall. *Quart. J. Mech. Applied Math.*, 68, 115-144.

Luo, H. and Pozrikidis, C. (2008) Effect of surface slip on Stokes flow past a spherical particle in infinite fluid and near a plane wall. *J eng Math*, 62,1-21.